Поляризационный оператор фотона в сильном магнитном поле с учетом вклада позитрония

Аникин Р. А., Михеев Н. В.

Ярославский Государственный Университет
кафедра теоретической физики

Ноябрь 22, 2011

сессия-конференция секции ЯФ ОФН РАН
«Физика фундаментальных взаимодействий»
Москва ИТЭФ, 21 — 25 ноября, 2011

Содержание

1 Дисперсия фотона в сильном магнитном поле

2 Мнимая часть поляризационного оператора и вероятность распада фотона

3 Специфика спектра позитрония в сильном магнитном поле

4 Энергия связи и волновая функция позитрония

5 Поляризационный оператор с учетом позитрония

6 Заключение

4-импульс фотона в сильном магнитном поле

4-импульс фотона $q^\alpha = (\omega\,, \vec{k})$ в сильном магнитном поле удобно разбить на два двумерных импульса:

- вектор в подпространстве Минковского (0,3):

$$q_{\parallel}^{\alpha} = (\omega\,, 0\,, 0\,, k_3), \quad q_{\parallel}^{2} = \omega^2 - k_3^2$$

- вектор в подпространстве Евклида (1,2):

$$q_{\perp}^{\alpha} = (0\,, \vec{k}_\perp\,, 0), \quad q_{\perp}^{2} = \vec{k}_{\perp}^{2}$$

$$\boxed{q^2 = q_{\parallel}^{2} - q_{\perp}^{2}}$$

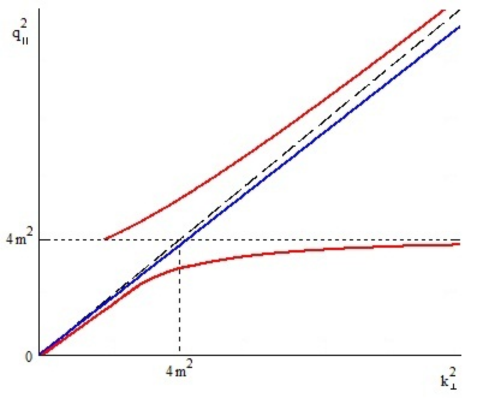
$\vec{B} = (0,\ 0,\ B)$; $\varphi^{\alpha\beta} \equiv F^{\alpha\beta}/B$; $\tilde{\varphi}^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varphi_{\mu\nu}$

в ковариантном виде: $q_{\parallel}^{\alpha} = (q\,\tilde{\varphi}\,\tilde{\varphi})^\alpha$, $q_{\perp}^{\alpha} = (q\,\varphi\,\varphi)^\alpha$.

Дисперсия фотона в сильном магнитном поле

Закон дисперсии фотона определяется поляризационным оператором фотона:

$$q_{\parallel}^2 - q_{\perp}^2 = \Pi(q_{\parallel}^2, q_{\perp}^2)$$



Вектора поляризации соответствующие модам 1 и 2

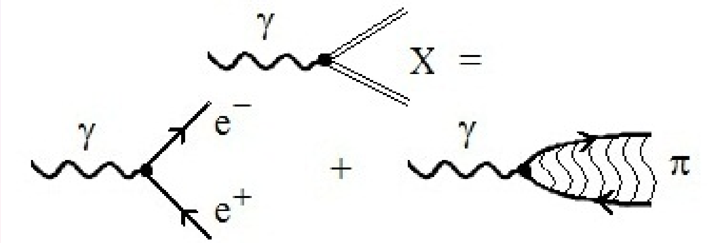
$$\varepsilon_{\alpha}^{(1)} = \frac{(q\varphi)_{\alpha}}{\sqrt{k_{\perp}^2}}$$

$$\varepsilon_{\alpha}^{(2)} = \frac{(q\tilde{\varphi})_{\alpha}}{\sqrt{q_{\parallel}^2}}$$

Соотношение между мнимой частью поляризационного оператора фотона и вероятностью распада фотона

H.A. Weldon Phys. Rev. D, 1983:

$$Im(\Pi_X) = -\omega\, W_{\gamma \to X}$$



в вычислениях подразумеваться следующая иеррархия параметров:

$$m_W^2 \gg eB \geq E_\nu^2 \gg m_e^2$$

Вероятность распада фотона второй моды в сильном магнитном поле

- свободная e^+e^- пара:

$$Im(\Delta\Pi_{e^+e^-}) = -\omega W_{\gamma\to e^+e^-} = -\frac{4\alpha(eB)\, m_e^2\, e^{-k_\perp^2/2eB}}{\sqrt{q_\parallel^2(q_\parallel^2 - 4m_e^2)}}\theta(q_\parallel^2 - 4m_e^2)$$

- связанная e^+e^- пара - позитроний:

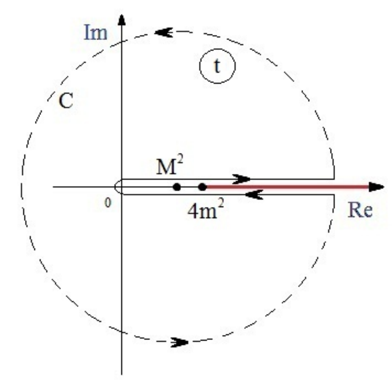
$$S_{\gamma\to\pi} = e\int d^4x < \pi|(\bar{\Psi}_e\gamma_\alpha\Psi_e)A_\alpha|\gamma > \simeq$$

$$\frac{e\,(2\pi)^3\,\delta(M-\omega)\delta(P_\perp - k_\perp)\delta(P_z)\, e^{-k_\perp^2/4eB}}{\sqrt{2\omega V}\sqrt{L_y^2 L_z}}\chi(0)$$

$$Im(\Delta\Pi_\pi) = -\omega W_{\gamma\to\pi} = -4\pi\alpha M\,(eB)\,|\chi(0)|^2\, e^{-k_\perp^2/2eB}\delta(q_\parallel^2 - M^2)$$

$$M = 2m_e - \varepsilon$$

Востановление пляризационного оператора по его мнимой части



Дисперсионное соотношение
с одним вычитанием:

$$\Pi(t) = \int_0^\infty \frac{Im(\Pi(t'))\,dt'}{t' - t - i0} - \Pi(0)$$

$t = q_\parallel^2$

Поляризационный оператор фотона с учетом позитрония

- вклад в поляризационный оператор фотона от свободной e^+e^- пары:

$$\Delta\Pi^{e^+e^-} = -\frac{2\,\alpha\,(eB)\,e^{-k_\perp^2/2eB}}{\pi}\,H(z)$$

$$H(z) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1 - z(1-x^2) - i0} - 1\,, \quad z = \frac{q_\parallel^2}{4m_e^2}$$

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{z}{1-z}}\,, \quad 0 < z < 1$$

- вклад в поляризационный оператор фотона от позитрония:

$$\Delta\Pi^{\pi} = -\frac{2\,\alpha(eB)\,|\chi(0)|^2\,z}{m_e(1 - \frac{\varepsilon}{m_e} - z)}\,e^{-k_\perp^2/2eB}$$

Поляризационный оператор фотона с учетом позитрония

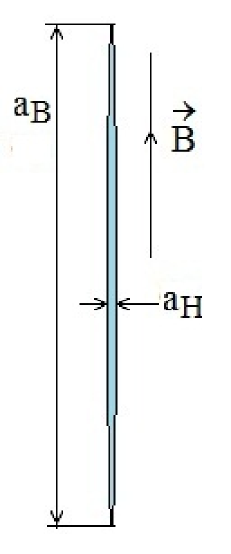
Поляризационный оператор фотона второй моды в сильном магнитном поле с учетом свободной e^+e^- пары и позитрония:

$$\Pi^{tot} = -2\alpha(eB)\, e^{-\rho} \left[\frac{1}{\pi} H(z) + \frac{|\chi(0)|^2\, z}{m_e\left(1 - \frac{\varepsilon}{m_e} - z\right)} \right], \quad \rho = \frac{k_\perp^2}{2eB}$$

Для дальнейшего анализа задачи необходимо вычислить:

- значение волновой функции позитрония в нуле $|\chi(0)|^2$ - ?
- энергию связи ε - ?

Задача становиться одномерной



- боровский радиус:

$$a_B = \frac{1}{m_e \alpha}$$

- ларморовский радиус:

$$a_H = \frac{1}{\sqrt{eB}}$$

$$\frac{B}{B_e} = b\,, \quad B_e = m_e^2/e \simeq 4.41 \cdot 10^{13} \text{ Гс}$$

$$b \simeq 100\,; \;\; 1000$$

$$\frac{a_H}{a_B} = \frac{\alpha}{\sqrt{b}} \ll 1$$

$$a_H \ll a_B$$

Уравнение Шредингера

Волновая функция $\chi(x_3)$ удовлетворяет одномерному уравнению Шредингера :

$$\left(-\frac{1}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + U_{eff}(x_3) + \varepsilon\right)\ \chi(x_3) = 0$$

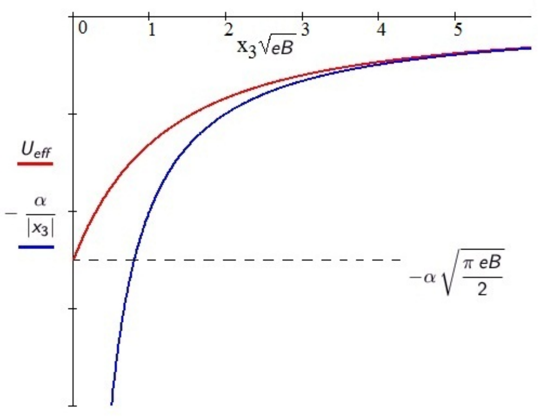
$\mu = m_e/2$ - приведенная масса.

«Эффективную» потенциальную энергию U_{eff} можно выразить в виде (*A.E. Shabad, V.V. Usov* Astrophysics and Space Science, 1986) :

$$U_{eff}(x_3) = -\frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}\,dx_1\,dx_2}{\sqrt{\frac{x_1^2}{eB} + \left(x_2 + \frac{P_\perp}{\sqrt{eB}}\right)^2\frac{1}{eB} + x_3^2}}$$

$P_\perp$ - поперечный магнитному полю импульс позитрония

«Эффективная» потенциальная энергия U_{eff}



- $x_3 \leq \frac{1}{\sqrt{eB}}$

  $$U_{eff}(x_3) \sim -\alpha\sqrt{eB}$$

  $$\chi(x_3) \approx \chi(0)$$

- $x_3 \gg \frac{1}{\sqrt{eB}}$

  $$U_{eff}(x_3) \approx -\frac{\alpha}{|x_3|}$$

  $$\chi(x_3) = \chi(0)\,\frac{W_{\nu,\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha m_e}{\nu}|x_3|\right)}{W_{\nu,\frac{1}{2}}(0)}$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha^2\, m_e}{4}\,\frac{1}{\nu^2}$$

Глубокий уровень с энергией связи ε

возникает глубокий уровень с энергией связи ε, много большей типичной ε_n

$$\varepsilon \gg \varepsilon_n \simeq \frac{\alpha^2 m_e}{4n^2} \simeq \frac{6.8\,\text{эВ}}{n^2}\,.$$

этому уровню соответствует самое большое значение волновой функции при $x_3 = 0$ (*A.E. Shabad* Ann. Phys. 1975)

$$\frac{|\chi(0)|^2}{|\chi_n(0)|^2} \sim \frac{b}{\alpha^2} \gg 1\,.$$

Таким образом, влияние позитрония на дисперсию фотона практически ограничивается только этим, основным уровнем

Сшивка решений (*Б.М. Карнаков, В.С. Попов* ЖЭТФ 2003)

Используя методику сшивки, развитую при решении задачи о спектре атома водорода в сильном магнитном поле, получаем трансцендентное уравнение для нахождения ν $\left(\varepsilon = \frac{\alpha^2 m_e}{4} \frac{1}{\nu^2}\right)$

$$\frac{1}{\nu} - 2\ln\nu + 2\psi(1-\nu) = \ln\frac{2b}{\alpha^2} - \ln\rho + E_i(-\rho) - 4\gamma_E$$

$b = B/B_e$, $\rho = P_\perp^2/2eB$, $\psi(s) = \Gamma'(s)/\Gamma(s)$ - логарифмическая производная гамма-функции, $\gamma_E = 0.5772...$ - постоянная Эйлера

$$E_i(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \frac{e^t}{t} dt$$

Аналитическое выражение для основного уровня энергии

$$\varepsilon = \frac{\alpha^2 m_e}{4} \frac{1}{\nu^2}$$

$$\nu(b,\rho) \simeq \left[\ln(4.5\,u) - 2.44\ln\left(\ln(0.15\,u)\right)\right]^{-1}$$

$$u = \frac{b}{\alpha^2} \cdot \frac{e^{E_i(-\rho)}}{\rho} \gg 1\,, \quad \rho = \frac{P_\perp^{\,2}}{2eB}$$

- $\nu(b,\rho)$ описывает решение уравнения с погрешностью $\lesssim 0.2\,{}^o/_o$ в области $\rho \lesssim 5\,,\ 10 \lesssim b$
- $\nu(b,\rho)$ при $\rho \to 0$ и замене $u \to u/4$ (что соответствует пересчету приведенной массы от позитрония к атому водорода) с хорошей точностью описывает энергию основного уровня атома водорода в сильном магнитном поле (*Б.М. Карнаков, В.С. Попов* ЖЭТФ 2003)

Волновая функция позитрония $|\chi(0)|^2$

$|\chi(0)|^2$ находим из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \, |\chi(x_3)|^2 = 1$$

функция Уиттекера хорошо описывает волновую функцию $\chi(x_3)$ за исключением узкой области $|z| \sim 1/\sqrt{eB}$, дающей пренебрежимо малый вклад в интеграл нормировки, имеем:

$$|\chi(0)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dz \left(\frac{W_{\nu,\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha m_e}{\nu}|z|\right)}{W_{\nu,\frac{1}{2}}(0)} \right)^2 = 1$$

В приближении $\nu \ll 1$

$$|\chi(0)|^2 \simeq \frac{\alpha\, m_e}{2\,\nu} \left(1 - 2\,\nu + O(\nu^2)\right)$$

Поляризационный оператор с учетом позитрония

$$\Pi = -2\alpha(eB)\, e^{-\rho} \left[\frac{1}{\pi} H(z) + \frac{|\chi(0)|^2\, z}{m_e \left(1 - \frac{\varepsilon}{m_e} - z\right)} \right]$$

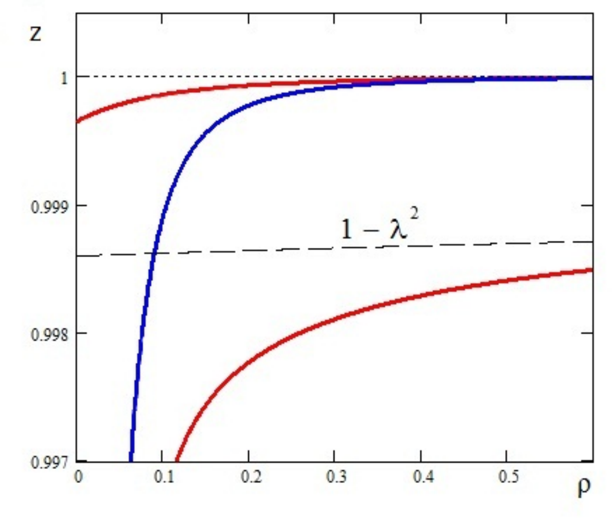
$$|\chi(0)|^2 \simeq \frac{\alpha\, m_e}{2\,\nu}\,, \quad \varepsilon = \frac{\alpha^2\, m_e}{4} \frac{1}{\nu^2}$$

при $0 < z < 1$

$$\Pi \approx -\,\alpha\, eB\, e^{-\rho} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{1-z}} - \frac{4}{\pi} \right) + \frac{2\lambda z}{1 - \lambda^2 - z} \right]$$

$$z = \frac{q_{\parallel}^2}{4m_e^2} = \frac{\omega^2 - k_3^2}{4m_e^2}\,, \quad \rho = \frac{k_{\perp}^2}{2eB}\,, \quad \lambda = \frac{\alpha}{2\nu}$$

Дисперсионные линии фотона второй моды в сильном магнитном поле



синяя линия соответствует спектральной линии фотона без учета вклада позитрония

красные линии соответствуют спектральным линиям фотона с учетом вклада позитрония

Заключение

- Исследован поляризационный оператор фотона второй моды в сильном магнитном поле с учетом вклада связанной электрон-позитронной пары.
- Учет позитрония приводит к существенному изменению закона дисперсии.
- Дисперсионная линия с учетом вклада позитрония расщепляется на две, которые с ростом $\rho = k_\perp^2/2eB$ асимптотически стремятся к спектральной линии свободной покоящейся относительно друг друга электрон-позитронной пары и к спектральной линии позитрония.

Спасбо за внимание !